УДК 512.71

ПРО АЛГЕБРУ З’ЄДНАНЬ СТРУКТУР СФ СИСТЕМ

В. Рабик, к.ф.-м.н.
Львівський національний аграрний університет

Ключові слова: структура, операція, алгебра, множина, відображення, крайове ребро, вершина.

Побудована алгебра з’єднань структур СФ систем, обґрунтовані її властивості.

Постановка проблеми. На практиці СФ системи взаємодіють між собою. Зокрема вони можуть з’єднуватися, утворюючи при цьому складніші об’єкти. Ці процеси описують алгеброю структур, функцій систем [1; 2].

Виклад основного матеріалу. Алгебра з’єднань структур СФ систем базується на тому, що множину структур вважають множиною, елементи якої можуть різними способами з’єднуватися (взаємодіяти), утворюючи при цьому складніші об’єкти. Зокрема така алгебра дає змогу будувати структуру системи управління технологічних систем виробництва тощо [1 – 3].

Розглянемо поняття рівності двох структур. Нехай задано структури $\Sigma_1 = < Q_1, U_1, \varepsilon_1 >$ і $\Sigma_2 = < Q_2, U_2, \varepsilon_2 >$.

Структури Σ_1 і Σ_2 називають рівними, якщо їх відповідні компоненти рівні, тобто

$\Sigma_1 = \Sigma_2 \Leftrightarrow Q_{01} = Q_{02} \wedge Q_1 = Q_2 \wedge U_{01} = U_{02} \wedge U_1 = U_2 \wedge \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, де Q_1, Q_2 – відповідно множини вершин структури; $Q_{01} \subset Q_1, Q_{02} \subset Q_2$ – виділені вершини (полюси); U_1, U_2 – множини ребер; $U_{01} \subset U_1, U_{02} \subset U_2$ – виділені (крайові) ребра, ε – відношення інциндентності. З визначення випливає, що відношення рівності структур є відношенням еквівалентності,

Об’єднанням структур Σ_1 і Σ_2 називають бінарну операцію, яка цим структурам ставить у відповідність структуру $\Sigma = < Q, U, \varepsilon >$, яка визначається: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = < Q_{01} \cup Q_{02}, Q_1 \cup Q_2, U_{01} \cup U_{02}, U_1 \cup U_2, \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 >$.

Нехай $v_{01} \in U_{01}, v_{01} \overset{\cup}{\varepsilon}_1 < q_1, q_{01} >$, де $q_{01} \in Q_{01}, q_1 \in Q_1; v_{02} \in U_{02}$ і $v_{02} \overset{\cup}{\varepsilon}_2 < q_{01}, q_2 >$, де $q_{02} \in Q_{02}, q_2 \in Q_2$.

Елементарним з’єднанням $e = < v_{01}, v_{02} >$ структур Σ_1 і Σ_2 через пару крайових ребер $< v_{01}, v_{02} > \in U_{01} \times U_{02}$, або (v_{01}, v_{02}) – з’єднанням називається бінарна операція, яка структурам Σ_1 і Σ_2 ставить у відповідність структуру $\Sigma = \Sigma_1 \overset{e}{\circ} \Sigma_2 = \Sigma_1 \overset{< v_{01}, v_{02} >}{\circ} \Sigma_2 = < Q_0, Q, U_0, U, \varepsilon >$, компоненти якої визначаються співвідношеннями:

$Q_0 = (Q_{01} \cup Q_{02}) \setminus \{q_{01}, q_{02}\}; Q = (Q_0 \setminus Q_{01}) \cup (Q_2 \setminus Q_{02}) \cup Q_0; U_0 = (U_{01} \cup U_{02}) \setminus \{v_{01}, v_{02}\};$

$U = (U_1 \setminus U_{01}) \cup (U_2 \setminus U_{02}) \cup U_0 \cup \{u\}, u \overset{\cup}{\varepsilon} < q_1, q_2 >,$

$\varepsilon = (\varepsilon_1 \setminus << q_1, q_{01} >, v_{01} >) \cup (\varepsilon_2 \setminus << q_{02}, q_2 >, v_{02} >) \cup (<< q_1, q_2 >, u >).$

Очевидно, що з’єднання орієнтованих структур проходить через вихідне ребро першої і вхідне ребро другої структури; неорієнтовані структури з’єднуються через довільну пару крайових ребер, одне з яких належить одній, а друге – другій структурі.

Елементарним самоз’єднанням $c = < v_{01}, v_{02} >$, або $< v_{01}, v_{02} >$ – самоз’єднанням структури $\Sigma = < Q_0, Q, U_0, U, \varepsilon >$ через пару крайових ребер $v_{01}, v_{02} \in U_0$, де

$v_{01} \overset{\cup}{\varepsilon} < q_1, q_2 >, v_{02} \overset{\cup}{\varepsilon} < q_{02}, q_2 >, q_1, q_2 \in Q, q_{01}, q_{02} \in Q_0$, називається унарна операція, яка структурі Ω ставить у відповідність структуру $\Omega' = < Q'_0, Q', U_0', U', \varepsilon' >$, визначену так: $Q_0' = Q_0 \setminus \{q_{01}, q_{02}\}$, $Q' = (Q \setminus Q_0) \cup Q_0'$, $U_0' = U \setminus \{v_{01}, v_{02}\}$;

$U' = (U \setminus U_0) \cup U_0' \cup \{u\}$, де $u \overset{\cup}{\varepsilon}' < q_1, q_2 >$;

$\varepsilon' = (\varepsilon \setminus \{< q_1, q_{01} >, v_{01} >, << q_{02}, q_2 >, v_{02} >\} \cup \{<< q_1, q_2 >, u >\})$.

Очевидно, що елементарне самоз'єднання для орієнтованих структур визначається через вхідне і вихідне ребро, а для неорієнтованих — через довільну пару крайових ребер.

Елементарним замиканням структури Ω оберненим зв'язком (елементарним $< v_{01}, v_{02} >$ – замиканням), або елементарною інтерацією за допомогою крайових ребер $v_{01}, v_{02} \in U_0$, називається така унарна операція, яка структурі Ω ставить у відповідність структуру $\Omega^* = \Omega^*_{< v_{01}, v_{02} >}$, визначену рівністю: $\Omega^* = \Omega^*_{< v_{01}, v_{02} >} = \Omega \cup |\Omega|_{< v_{01}, v_{02} >}$, де $|\Omega| = cardU_0$ – потужність краю структури.

З попереднього випливає, що операція $\Omega_1 \overset{< v_i, v_j >}{\circ} \Omega_2$ є частковою, оскільки вона визначена для $i \subseteq |\Omega_1|, j \subseteq |\Omega_2|$, $v_i \in U_{01}, u_j \in U_{02}$, $i = \overline{1, |\Omega_1|}, j = \overline{1, |\Omega_2|}$. Нехай σ – множина всіх структур. Множина σ, на якій визначені операції об'єднання, елементарного з'єднання та елементарної ітерації, утворює алгебру елементарних з'єднань (е – алгебру) структур СФ систем, тобто об'єкт $A_e = < \sigma, U, \overset{< v_i, v_j >}{\circ}, *^{< v_i, v_j >}, i, j = 1, 2, ... >$, де $\overset{< v_i, v_j >}{\circ} \in L_e$ – множина всіх можливих елементарних з'єднань неорієнтованих структур Ω_1 і Ω_2, $* < v_i, v_j > \in L_{ei}$ – множина всіх елементарних ітерацій, тобто множина всіх можливих пар $< v_i, v_j >, v_i, v_j \in U_0$.

З визначень операції $\overset{< v_i, u_j >}{\circ}$ і $* < v_i, v_j >$ випливає, що: алгебра A_e є частковою алгеброю; операція $\cup$ – комутативна; операція $* < v_i, v_j >$ – ідемпотентна; операція $\overset{< v_i, u_j >}{\circ}$ – недистрибутивна відносно операції об'єднання, оскільки кожне ребро однієї структури може з'єднуватися з одним і тільки одним ребром інших структур; операція $\overset{< v_i, v_j >}{\circ}$ – не асоціативна.

Операції з'єднання, самоз'єднання ітерації можна узагальнити на підмножини $U^*_{01} \subseteq U_{01}, U^*_{02} \subseteq U_{02}$ крайових ребер за умови, що $cardU^*_{01} = cardU^*_{02}$.

Розглянемо множину Γ^* усіх взаємно однозначних відображень множини U^*_{01} на U^*_{02}, тобто $\Gamma^* \subseteq U^*_{01} \times U^*_{02}$. Тоді можна розглядати γ – з'єднання, $\gamma \in \Gamma^*$; γ – самоз'єднання структури Ω множинами крайових ребер U^*_0 і U^{**}_0, $\Gamma^* \subseteq U^*_0 \times U^{**}_0$ (γ – ітерацію).

Нехай Γ – множина всіх взаємно-однозначних відображень неперетинних множин крайових ребер структур і пар структур; Λ – непорожній клас структур. Алгебра $M_\Sigma = < \Lambda, U, \overset{\gamma}{\circ}, *\gamma, \gamma \in \Gamma >$ називається алгеброю з'єднань структур.

В алгебрі з'єднань структур виконуються рівності:

$$(\Omega_1 \overset{\gamma_1 \cup \gamma_2}{\circ} \Omega_2) \cup (\Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2) = (\Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2)^*_{\gamma_2};$$

$$(\Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2)^*_{\gamma_2} \cup (\Omega_1 \overset{\gamma_2}{\circ} \Omega_2) = (\Omega_1 \overset{\gamma_2}{\circ} \Omega_2)^*_{\gamma_1} \cup (\Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2);$$

$$(\Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2) \cup (\Omega_1 \overset{\gamma_2}{\circ} \Omega_2) = (\Omega_1 \overset{\gamma_1 \cup \gamma_2}{\circ} \Omega_2) \cup (\Omega_1 \cup \Omega_2);$$

$$(\Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2) \cup (\Omega_2 \overset{\gamma_2}{\circ} \Omega_3) = \Omega_1 \overset{\gamma_1}{\circ} \Omega_2 \overset{\gamma_2}{\circ} \Omega_3 \cup \Omega_2;$$

$$\left(\left(\text{е}\right)^{*}_{\gamma_1}\right)^{*}_{\gamma_2} = \left(\text{е}\right)^{*}_{\gamma_1 \text{И} \gamma_2}.$$

Операції И і $\overset{\gamma}{0}$ комутативні. Операція $\overset{\gamma}{0}$ неасоціативна відносно операції И, операція $*_{\gamma}$ ідемпотентна. Потужність краю з'єднань і замкнутих структур в алгебрі M_{Σ} задовольняє умови:

$$\left|\text{е}_1 \overset{\gamma}{0} \text{е}_2\right| = \left|\text{е}_1\right| + \left|\text{е}_2\right| - 2r;$$

$$\left|\text{е}\overset{\gamma}{0}\right| = \left|\text{е}\right|,$$

де $r = card\gamma$; γ – скінченна множина елементарних з'єднань.

Позначимо $L\left(\text{е}_1, \text{е}_2\right)$ множину можливих з'єднань структур е_1 і е_2 зі скінченними потужностями крайових ребер. Потужність $N\left(\text{е}_1, \text{е}_2\right)$ множини можливих з'єднань $L\left(\text{е}_1, \text{е}_2\right)$ структур е_1 і е_2 визначається формулою: $N\left(\text{е}_1, \text{е}_2\right) = cardL\left(\text{е}_1, \text{е}_2\right) = \text{е}_{r=1}^{l} A^{r}_{|\text{е}_1|} \text{Ч} C^{r}_{|\text{е}_2|}$,

$r = cardU^{*}_{0}, l = min\left(\left|\text{е}_1\right|, \left|\text{е}_2\right|\right)$.

Потужність $N\left(\text{е}\right)$ множини можливих ітерацій $L\left(\text{е}, \text{е}\right)$ структури е визначається формулою:

$$N\left(\text{е}\right) = cardL\left(\text{е}, \text{е}\right) = \text{е}_{r=1}^{l} A^{r}_{2r} C^{2r}_{|\text{е}|} \text{Ч} \frac{1}{2^{r}},$$ де $l = \text{й}\frac{|\text{е}|}{2}\text{щ}$ – ціла частина числа $\frac{1}{2}|\text{е}|$.

Висновки

1. Побудова алгебри з'єднань структур.
2. Доведено, що алгебра з'єднань структур є частковою алгеброю $[4]$.
3. Алгебра з'єднань структур дає змогу розглядати структури системи управління як композицію структур керованої і керуючої систем.

Бібліографічний список

1. Бойда Л. В. Об исследовании экономических систем алгебраическими методами / Л. В. Бойда, Я. А. Дубров, В. М. Рабик. // Экономико-математические методы управления и эффективность производства. – К., 1974. − С. 18–25.
2. Бойда Л. В. Связь алгебраических и структурно-функциональных систем / Бойда Л. В., Рабик В. М. // Тезисы докладов XXI Украинской республиканской наук.-техн. конф., посвященной 50-летию образования СССР, Дню радио и Дню связи. Вып. 1. – К., 1972. − С. 31–33.
3. Рабик В. М. Вопросы описания и оптимизации структур сложных систем / В. М. Рабик // Экономико-математические методы управления и эффективность производства. – К., 1974. − С. 51-59.
4. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 378 с.

Рабик В. Об алгебре соединений структур СФ систем

Построена алгебра соединений структур СФ систем, обоснованы ее свойства.

Ключевые слова: структура, операция, алгебра, множественное число, отображение, краевое ребро, вершина.

Rabik W. About algebra of structures connections of the SF systems

Constructed algebra of structure connections SF systems, its well-founded properties.

Key words: structure, operation, algebra, multiplication, reflection, border rib, vertex.